§3.3 柯西积分公式及推广

一. 柯西积分公式

Thm 1. 设 $f(z)$ 在围线（或复围线）所围区域 D 上解析，在 $\overline{D} = D + C$ 上连续，则对 D 内任一点 z 都有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Pf. 记 $F(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{2\pi i(\zeta - z)}$，对任意取定的 z，$F(\zeta)$ 在 $\zeta \in D$ 上除了 z 外都解析

以 z 为圆心作 Γ_ρ 取逆时针且 Γ_ρ 含在 C 内，记 $L = C + \Gamma_\rho^{-1}$，

由复围线的柯西积分定理，$\oint_L F(\zeta)\, d\zeta = 0$

即 $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \lim_{\rho \to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

又有 $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$f(\zeta)$ 在 D 内任一点 z 处连续，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|\zeta - z| < \delta$ 时 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$，当 $\rho < \delta$ 时，

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left| \oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho = \varepsilon$$

即 $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

二. 柯西积分公式的推广

Thm 2. 在 Thm 1. 的条件下，$f(z)$ 在 D 内有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Pf. $n=0$ 时 Thm 1. 已证

若 $n-1$ 时成立，则 $f^{(n-1)}(z)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n}}d\zeta$

下证 $f^{(n)}(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f^{(n-1)}(z+\Delta z)-f^{(n-1)}(z)}{\Delta z}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$

$$\frac{f^{(n-1)}(\cancel{\Delta z}z+\Delta z)-f^{(n-1)}(z)}{\Delta z}=\frac{(n-1)!}{2\pi i\cdot\Delta z}\oint_C \cancel{f(z)}f(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{n}}-\frac{1}{(\zeta-z)^{n}}\right]d\zeta$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i\Delta z}\oint_C f(\zeta)\frac{[C_n^1(\zeta-z)^{n-1}\Delta z-\cdots+(-1)^{n+1}(\Delta z)^n]}{(\zeta-z-\Delta z)^n(\zeta-z)^n}d\zeta$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\frac{C_n^1(\zeta-z)^{n-1}+\cdots+(-1)^{n+1}(\Delta z)^{n-1}}{(\zeta-z-\Delta z)^n(\zeta-z)^n}d\zeta$$

$$\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta-\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\cdot\frac{C_n^1(\zeta-z)^{n-1}+\cdots+(-1)^{n+1}(\Delta z)^{n-1}}{(\zeta-z-\Delta z)^n(\zeta-z)^n}d\zeta\right|$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C f(\zeta)\frac{\frac{1}{n}[C_n^1(\zeta-z)^{n-1}+\cdots+(-1)^{n+1}(\Delta z)^{n-1}][\zeta-z]-(\zeta-z-\Delta z)^n}{(\zeta-z-\Delta z)^n(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(\zeta)\cdot h(\zeta)\cdot\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)^n(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|$$

记 z 到 C 的最短距离为 d，当 $|\Delta z|<\frac{d}{2}$ 时，

则 $|\zeta-z-\Delta z|\geq\frac{d}{2}$，$|\zeta-z|\geq d$

由 $f(\zeta)$、$h(\zeta)$ 在 C 上连续有界，记 $|f(\zeta)\cdot h(\zeta)|\leq M$，

再记 C 的弧长为 l，则上式有：

$$\left|\frac{n!}{2\pi i}\Delta z\oint_C \frac{f(\zeta)h(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)^n(\zeta-z)^{n+1}}\right|\leq\frac{n!}{2\pi}|\Delta z|\frac{M}{(\frac{d}{2})^n d^{n+1}}\cdot l$$

令 $\Delta z\to 0$ 得，$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$

Cor. 若 $f(z)$ 在区域 D 上解析，则 $f(z)$ 在 D 上有任意阶导数，即解析函数的导数还是解析函数。

Pf. 对 D 内任一点 z，在 z 的某邻域内作一个小圆 Γ_ρ 取逆时针，由柯西积分公式，$f^{(n)}(z)$ 存在 $(n=0,1,\cdots)$ 且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

由z的任意性知$f^{(n)}(z)$在D上解析.

三、解析的充要条件

Thm3. $f(z)=u+iv$在区域D内解析$\Leftrightarrow u,v$在D上有连续偏导数且满足C-R条件. $\Leftrightarrow u,v$可微且满足C-R条件

Pf. 由解析充要条件可知'$\Leftarrow$'成立.

考虑$f(z)$解析,则$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$也解析

u,v有连续偏导数

Thm4. (Morera)

设$f(z)$在区域D上连续,且对D内任意围线C,都有$\oint_C f(z)dz=0$,则$f(z)$在D内解析.

Pf. 根据条件,$\int_C f(z)dz$在D内与路径无关,取定一点$z_0\in D$,

记$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi$,则$F'(z)$存在且$F'(z)=f(z)$

显然,$F(z)$在D内解析,$F'(z)$也解析,即$f(z)$在D上解析.

Thm5. $f(z)$在单连域D上解析$\Leftrightarrow f(z)$在D上连续,且对D内任意围线C有$\oint_C f(z)dz=0$.

Pf. $\Rightarrow$:柯西积分定理

$\Leftarrow$: Morera定理单连域情形的结果

四. 柯西积分公式应用举例

柯西积分公式:$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

$$\Leftrightarrow \oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n}}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0)$$

例1 计算下列积分：

(1) $$\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=0}=-\pi i$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^5}dz=\frac{2\pi i}{4!}(e^z)^{(4)}\Big|_{z=0}=\frac{\pi i}{12}$$

(2) $$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-1)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(\sin z)''\Big|_{z=1}=-\pi i\cdot\sin 1$$

(3) $$\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin z}{z^2-1}dz=\oint_{|z-1|=1}\frac{\frac{\sin z}{z+1}}{z-1}dz=2\pi i\cdot\frac{\sin z}{z+1}\Big|_{z=1}=\pi i\cdot\sin 1$$

(4) $$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2-1}dz=\oint_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\cdot\frac{1}{2}\sin z\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z-1}dz-\frac{1}{2}\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z+1}dz=2\pi i\cdot\sin 1$$

五、与柯西积分公式有关的结果

1. 平均值定理

Thm 6. 设$f(z)$在圆域$D:|z-z_0|<R$上解析，在$\overline{D}$上连续，

记$\Gamma_\rho:|z-z_0|=\rho\ (\rho\leq R)$取逆时针，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

Pf. 由柯西积分公式，$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\xlongequal{z=z_0+\rho e^{i\theta}}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}}\rho e^{i\theta}i\,d\theta$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

2. 柯西积分不等式

Thm 7. 设$f(z)$在$D:|z-z_0|<R$上解析，记$\Gamma_\rho:|z-z_0|=\rho\ (\rho<R)$，

$|f(z)|$在Γ_ρ上的上界$|f(z)|\leq M(\rho)$，则

$$|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{n!M(\rho)}{\rho^n}$$

Pf. 由柯西积分公式，$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{T_\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

$$|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{n!}{2\pi}\frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho=\frac{n!M(\rho)}{\rho^n}$$

3. Liouville定理

Def. 在全平面 $\mathbb{C}$ 上解析的函数称为整函数.

例如，$f(z)=z^n$，$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ 均为整函数

Thm 8. (Liouville)

有界整函数必为常数.

Pf. $\forall z\in\mathbb{C}$，以 z 为圆心作圆 $T_\rho:|\zeta-z|=\rho$ 取逆时针

由柯西积分定理，$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{T_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$

当 $|f(z)|$ 有界时，记 $|f(z)|\leq M$

由柯西积分不等式，$|f'(z_0)|\leq\frac{M}{\rho}$，令 $\rho\to+\infty$，$|f'(z_0)|\leq 0,\forall z_0$

即 $f'(z_0)=0$，$f'(z)\equiv 0$，因此 $f(z)$ 为常值函数

例2 证明 n次多项式方程在 $\mathbb{C}$ 上有n个根 $(n\geq 1)$

Pf. 设 $P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$

(1) 先证有根：若 $P_n(z)\neq 0$，构造 $F(z)=\frac{1}{P_n(z)}$ 是整函数

又 $\lim\limits_{z\to\infty}P_n(z)=\infty$，$\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$，即 $F(z)$ 有界，故 $F(z)$ 是常数

即 $F(z)$ 有根.

(2) 设 $z=z_1$ 是一个根，由多项式除法，$\frac{P_n(z)}{z-z_1}$ 是一个 $n-1$ 次多项式，也应有根.

进而 $P_n(z)$ 恰好有 n 个根.